Akademisk Afhandling

# Om en beqvämare inrättning af Qvadrat- och Rutetalens tabell,

hvilken

med Vidtberömda Filofiska Fakultetens tillstånd

och under Præsidium

af


Mag. CARL JOH. Ds. HILL,

Math. Professor, R. N. O., L. K. V. A.,


för

**Filosofiska Doktorsgraden**

utgifves

af

ACAD. LUGD.BAT. BIBL.


FRANS ELIS FAGERSTRÖM,

Filos. Kand., af Blekingska Nationen,


att offentligen försvaras

å Mathematiska Lärosalen den 10 Juni 1850.

**II.**

---


**Lund,**

tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,

1850.

En dylik inrättning kunna alla större tabeller få, såsom en som ginge till 10000 eller 100000. Dock kan den till vidare rumbesparing mycket förenklas, när man anmärker, att tal, som slutas på samma 3 siffror, ha ock sina qvadrater i slutet lika beskaffade, såsom $2759^2 = 7612|081$ och $3759^2 = 14130|081$ samt $9759^2 = 95238|081$, hvilka ha 081 till 3 gemensamma slutsiffror, — samt att närbelägna tal ha samma börjsiffror såsom $9758^2 = 95218564$ börjar med 952 liksom $9759^2$. Man behöfver derföre (liksom i logarithmtabeller) utsätta dessa första siffrorne blott en gång, och analogt de sista en gång gemensamt för alla tal som skilja jemt på ett eller flere tusend, så att det blott bli de 2 eller 3 mellersta siffrorna som variera och behöfva ini tabellen utsättas, der de dock komma att temligen reguliert fortgå i vissa arithmetiska serier. Præses föreslog derföre redan 1846 auditeur Scheutz, att med sin uppfunna maschin uträkna en sådan, och ge densamma nämnde rumbesparande inrättning, samt meddelade honom i detta ändamål deraf följande beskrifning (förutsatt att den så uträknades), hvilken vi här vilja intaga, ehuru den hänför sig till en ännu icke tryckt tabell, helst den kan tjena till rättelse antingen vid en dylik tabells uträkning med maschin eller genom differenser, eller blott utskrifning i en beqväm form ur redan uträknade tabeller, t. ex. Barlows. Härvid torde böra anmärkas, att sedermera Kulik (1848) utgifvit en tabell med ungefär dylik rumbesparing, utan att troligtvis känna till Præsidis förslag i detta afseendet, men också utan den beqväma dubbla ingången. Den har dock större utsträckning, nemligen till 100000, men innehåller dessutom cubiktalen, samt några Ar. "Hülfstafeln", hvilket väl kan hafva sina stora fördelar, men också alltför mycket förstorar och fördyrar densamma.

### I) Qvadrat-tabellen

innehåller qvadraterne på alla tal ($V$) $< 10000$, men fördelade i trenne delar eller classer, af hvilka den första anger millionerna, såsom 81˙ (hvarmed förstås 81 millioner), den andra tusendtalen, såsom 793′ (= säger 793 tusend = 793000), och den tredje de 3 sista, såsom ′936, der accenten erinrar om att tusendsiffrorne

skola skrifvas till venster härom, såsom numerations-reglorne föreskrifva. Sammanfogade utgöra dessa 81˙793'936 ett qvadrattal, nemligen = (9'044)$^2$. Roten dertill slås i tvänne delar, nemligen den första 9'0 anger hundra (= 90 hundra, eller 9' d. ä. 9 tusend och 0 hundra), och den andra 44 de två sista siffrorne (tior och enheter). Äfvenså fördelas 90,03$^2$ = 81|054,009.

Till följe häraf börjar tabellen så:

('0) (första sidan) ('0)

| *W* | 0'0 | *w'* | = 2'0 | 4'0 | 6'0 | 8'0 | 10'0 | 12'0 | 14'0 | 16'0 | 18'0 | = *u'* | *U* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0'0 | *V* | *v'* = 1'0 | 2'0 | 3'0 | 4'0 | 5'0 | 6'0 | 7'0 | 8'0 | 9'0 | | |
| *w* | $v^2$ | *v* | 1˙ | 4 | 9˙ | 16˙ | 25˙ | 36 | 49˙ | 64 | 81˙ | $v_1^2$ | |
| 00 | '000 | 00 | 000' | 000' | 000' | 000' | 000' | 000' | 000' | 000' | 000' | '000 | 01 |
| 02 | '001 | 01 | 002' | 004' | 006' | 008' | 010' | 012' | 014' | 016' | 018' | '002 | 03 |
| 04 | '004 | 02 | 004' | 008' | 012' | 016' | 020' | 024' | 028' | 032' | 036' | '006 | 05 |
| 06 | '009 | 03 | 006' | 012' | 018' | 024' | 030' | 036' | 042' | 048' | 054' | '012 | 07 |
| 08 | '016 | 04 | 008' | 016' | | | | | | | | '020 | 09 |
| 88 | 1'936 | 44 | 089' | | | | | | | | 793' | '980 | 89 |
| 98 | '401 | 49 | 100' | | | | | | | | 884' | '450 | 99 |
| | | *v* | 1 | 4˙ | 9˙ | 16˙ | 25˙ | 36˙ | 49˙ | 64˙ | 81˙ | | *U* |

Såsom man ser på dess första sida, står rotens första del $v'$ = 9'0 i raden *V* och dess andra $v$ = 44 i spalten *V* (eller under *V*); i dennes rad, men i nästa spalt venster om denna (eller under $v^2$ och i dess högra 3-siffriga del) står qvadratens 3:e del '936, och dess andra 793' står under rotens första del 9'0, i samma rad som $v$, men dess första del eller milliontalet 81˙ står i öfra eller undra raden $v^2 - v_1^2$ eller *U*, som i allmänhet äro lika eller blott skilja med 1˙, i hvilket fall man måste se efter, om den raden, hvari 2:a och 3:e delen togos, är öfver eller under den gränslinea, som är dragen i hvarje spalt, der första delen är olika ofvan och nedan. Är den under denna linea, så tages milliontalet nederst, annars öfverst. — Men för att bättre förstå denna tabellens construction, låt oss följa dess uträkning med differenzer eller med den af Barlow eller auditeur Scheutz uppfunna maschinen. Denna räknar med 2:ne differenser (eller flere, men här är den andra constant) eller snarare med summor (emedan qvadrattalen äro summor af uddatalen) och ger således:

| $v$ | $v^2$ | $\triangle(v^2)$ | $\triangle^2(v^2)$ | uträkning: |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | 1 | 3 (= 4—1) | 2 (= 5—3) | 1 = 0 + 1 |
| 2 | 4 | 5 (= 9—4) | 2 | 4 = 1 + 3 |
| 3 | 9 | 7 (= 16—9) | 2 | 9 = 4 + 5 |
| 4 | 16 | 9 | | 16 = 9 + 7 |
| 5 | 25 | | | 25 = 16 + 9 o. s. v. |
| . | | | | |
| . | | | | |
| . | | | | |
| 31 | 961 | | | |

Dessa tal sättas bredvid hvarandra i spalterne $v^2$ och $v$, såsom räkningen (genom maschinen) gifvit dem blott med en omkastning, (med uteslutande af differenserne), dock ifyllas nollor åt venster, så att spalten $v$ blir 2- och $v^2$ 3-siffrig $\begin{pmatrix}000\\001\\004\end{pmatrix}$, och sedermera kan tjena att ge andra qvadrattals tredje class. Vid fortsättningen befinnes $32^2 = 1024$, hvilket tal spaltas så 1′|′024, och sättes under $v^2$ (hvilken spalt härefter blir dubbel). Härmed fortfares ända till $1000^2$, hvilka tusen qvadrattal insättes i spalten $v^2$ (men afdelade med tusendtecknet (′) eller spaltstreck) bredvid och till venster om sina rötter i spalten $V$, der dock blott rotens 2:ne sista siffror utsättas, under det de första sättas öfver $v^2$ i raden $V$. Dervid fördelas de så, att 50 qvadrattal komma på hvar sida, början de med den venstra, så att på de 2 första på en gång uppslagna sidorna stå de första hundra qvadrattalen o. s. v. nemligen

$0^2$ till $49^2$ på den 1:a, $50^2$ till $99^2$ på den 2:a
$100^2$ till $149^2$ på den 3:e, $150^2$ till $199^2$ på den 4:e
$200^2$ till $249^2$ på den 5:e, $250^2$ till $299^2$ på den 6:e

o. s. v. ända till

$900^2$ till $949^2$ på den 19:e, $950^2$ till $999^2$ på den 20:e

sidan, så att man redan i förväg (innan man börjar slå upp talet) kan veta på hvilket blad och sida och äfven i hvilken spalt och ungefär å hvilken rad, något af dessa qvadrat-tal bör sökas, hvarigenom man redan kan ha rigtat ögat deråt under det man mekaniskt bläddrar om bladen, och således strax utan vidare sökande få syn på det och vara färdig att utskrifva det. Samma fördel kan man ock vinna vid finnandet af de följande qvadrattalens delar. Dervid förekommer i spalten $V$ blott rotens sednare del, nemligen 00, 01, 02 . . till 49 på hvarje venstra sida, och 50, 51, 52 . . till 99 på hvarje högra; men den första står öfver spalten $v^2$ i raden $V$, nemligen på 1:a och 2:a sidan 0′0, på den 3:e och 4:e 0′1, på den 5:e och 6:e 0′2 o. s. v. ända till den 19:e och 20:e, der 0′9 förekommer.

(Härvid är $0'$ föresatt, för att tillkännage att roten håller intet tusend, och af analogie med de i raden $V$ följande, som hålla i ordning $1'$, $2'$, $3'$ . . $9'$ tusend). Tillika är bredvid och före $v^2$ och $v$ fogad en spalt (den aldraförsta på hvarje sida), som innehåller $W = 2 . V$, så att om $W$ anses som ingång (argument), så anger $v^2$ qvadraten på halfva $W$ (ty $V^2 = \left(\frac{W}{2}\right)^2$); dervid är dock likaledes $W$ söndradt i tvenne delar $w' + w$, af hvilka den sednare ($w$) bestående af dess 2 sista siffror, 00, 02, 04 . . . . 10, 12, 14 . . . . 96, 98, som förekomma på hvarje sida i nämde första spalt (under $W$), men den första ($w'$) står i öfversta raden öfver $v^2$,

nemligen $0'0$, $0'1$, $0'2$, . . . . $0'n$ . . . . $1'9$
på sidorne 1, 2, 3, . . . . $n + 1$, . . 20.

Ty när t. ex. $V = 949$, så är $W = 1898$, således då detta $V$ står på den 19:de sidan, måste der $w' = 1'8$; och när $V = 950$, så är $W = 1900$ och således $w' = 1'9$ på den 20:de sidan.

Sedan således alla qvadrattal till $< 1000^2$ blifvit uträknade och i tabellen införda, eller spaltvis stereotyperade, 50 till hvar sida, så låter man maschinen fortfara att uträkna de följande qvadrattalen, först $1'000^2$ till $1'999^2$, men då $(1' + n)^2 = 1' + 2' . n + n^2$ (d. ä. $(1000 + n)^2 = 1000000 + 2000\,n + n^2$), och således de 3 sista siffrorne i detta tal måste vara desamma som i $n^2$, och således redan äro införda i tabellen, så förkastar man dem, och afsöndrar de öfriga i 2:ne delar, nemligen milliontalen, som sättas öfverst (nemligen det som tillhör talen af formen $(1'n00)^2$ eller $(1'n50)^2$ eller det öfversta qvadrattalet) och underst (det som tillhör den understa qvadraten eller tal af formen $(1'n49)^2$ eller $(1'n99)^2$) i samma rad ($v^2$ och $v$) såsom vid första tusendet men i nästa spalt $v'$ (till höger om och näst intill $V$), i hvilken qvadrattalets andra del eller tusendsiffrorne också ställes, men på samma rad som rotens 2 sista siffror stå, eller i den ordning maschinen frambringar dem. Alla de öfriga qvadraternes milliontal förkastas, sedan man genom ett gränsstreck anmärkt hvar de börja blifva olika; detta märker man äfven deraf, att den första af andra classens siffror öfvergår från 9 till 0. Att detta kan blott ske på ett ställe i hvar spalt och å samma sida, och att milliontalet der blott kan ökas med 1, vises så; om nemligen det öfversta talet är $= a^2$, så är det understa å samma sida och spalt högst $= (a + 49)^2$, men $a < 10'000$, således deras skillnad $= (a + 49)^2 - a^2 = 98\,a + 2'401$, och således $< = 982'401$, hvilket tal sammanlagt med $a^2$ högst kan gifva 1 i minne till millionrummet. *H. S. B.*

På samma sätt förfares med qvadraterne på tredje tusendet ($2'000^2$ till $2'999^2$), hvars 3 sista siffror likaledes uteslutas (och derföre vid behof kunna återhemtas från dem vid första tusendet, med hvilka till ett prof maschinen gaf dem lika),

men de 3 som uppnämnes efter tusend äfvensom milliontalen sättes i nästa spalt, de förra i ordning sidan nedåt, såsom de erhöllos och stereotyperades, så att i samma rad stå de som tillhöra $n^2$, $(1' + n)^2$, $(2' + n)^2$ o. s. v. för de följande tusenden, ända till $(9' + n)^2$, men de sednare ofvan eller nedan blott en gång. Äfvenså förfares för 4:de, 5:te . . ända till och med 10:de tusendets qvadrattal, så att alltid det som i dessa tusenden (utom i det första) af de genom maschinen uträknade talen är bibehållet och omedelbart är stereotyperadt, (50 tal för hvar sida i sender), är qvadrattalens andra class eller efter tusend benämda tre mellersta siffror; tredje classen är utesluten, och första classen eller milliontalen äro såsom gemensamma för nästan en hel sida, blott utsatta för det öfversta och understa talet, och det ej framför andra classen utan ofvan eller nedan i spalten $v$ eller $U$.

Hvad åter angår *roten* $V$ som i allmänhet är 4:siffrig, så är dess sista del eller 2 sista siffror $v$ anbragta en gång för alla i spalten $V$, men den första delen eller tusend och hundrasiffrorna $v'$ stå i raden $V$, nemligen $1'$, $2'$, $3'$ . . . $9'$ (tusend) på hvarje sida i sin spalt (eller der dess qvadrat-tals 2 första classer äro ställda), men hundrasiffrorne på hvar sin sida, nemligen 0 på 1:a och 2:a, 1 på 3:e och 4:e, 2 på 5:te och 6:te o. s. v. ända till $'9$ (hundra) på 19:de och 20:de sidan, så att det egentligen äro hundrasiffrorne, som reglera ingången i tabellen. — Ungefär samma förhållande är det med $W$; dess högra del är redan vid första tusendet satt ytterst = i spalten under $W$, dess venstra (2- eller 3-siffriga del) står öfverst = i raden $W$, nemligen på hvarje sida öfver hvar sin spalt i ordning $0'$, $2'$, $4'$, $6'$ . . . ända till $18'$ tusend, så länge hundrasiffran är $< 5$, men sedermera $1'$, $3'$, $5'$ . . . $19'$ tusend; men å hvar sin sida står en och samma hundrasiffra, nemligen $n$ hundra på den $(n + 1)$:ta sidan af tabellen, som är tecknad $'n$, för att genast i detta afseende igenkännas.

Till följe häraf *utskrifves* i omvänd ordning *qvadraten* på hvarje fyrsiffrigt tal $\delta\gamma\beta\alpha$ på följande sätt:

1) först afskäres de 2 sista siffrorne $\beta\alpha$, och den första förses med accent, då man får $\delta'\gamma$ som betyder $\delta$ tusend och $\gamma$ hundra. $\delta\gamma|\beta\alpha$.

2) Derefter uppslås den sidan, der $'\gamma$ finnes i raden $V$ (eller den som ofvan i tabellen är tecknad $'g$, om 2 gånger $'\gamma\beta$ gör $= 'gb$).

3) Å denna sida i spalten $V$ uppsökes $\beta\alpha$, och bredvid till venster derom (eller i spaltens $v^2$ högra del) i samma rad står ett tresiffrigt tal . . . . . . $'CBA$, som utskrifves, såsom varande qvadratens 3 sista siffror.

4) I samma rad, men i den spalt, som i raden $V$ har öfverskriften $\delta'\gamma$, står . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $FED'$ som är qvadrattalets andra class eller tusendtal.

5) I samma spalt men i raden $v^2$ eller $v$ står dess första siffror . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $HG^{\cdot}$ (millioner),

således eges qvadraten . . . . . $(\delta\gamma\beta\alpha)^2 =$ . . . . . . . . . . . . . $HG^{\cdot}FED'CBA$,

som med ringa öfning genast utskrifves i ett enda drag hel och hållen.

Ex. Begäres $9044^2$.

enligt 1) ($\delta'\gamma =$) 9'0 | 44 ($= \beta\alpha$). 2) sidan '0 (= den första)

3) står i spalten $v$ och $v^2$

och samma rad som 44 ($=\beta\alpha$) . . ($'CBA =$) '936

4) i samma rad (44) och spalten 9'0 står 793' (tusend)

5) i samma spalt (tecknad 9'0 i raden $V$) står 81˙ (millioner) i raden $v^2$

Således är $9044^2$ = 81˙793'936.

Eller korteligen 9'0 | 44

81˙ 793' '936.

Ex. Begäres qvadraten af 7'0 | 83

Svar 50˙ 168 '889.

NB. Emedan spalten ($V$) 7'0 mellan raderne 71 och 72 (eller mellan dess tal 999' och ˙013') har ett streck eller en gränslinea, och vår rad 83 är derunder, så tages milliontalet 50˙ i understa raden ($U$).

Om den till argumentet $W$ hörande qvadrat gäller samma reglor, blott att man läser $W$ för $V$, och uti den i 2) nämda sidan "är tecknad ($'\gamma$) i tabellen ofvantill"; och i 3) läses . . . "bredvid till höger derom."

Ex. $(\frac{1}{2} \,.\, 14'0|06)^2 =$ 49˙|042'|'009.

Detta är qvadrat-tabellens omedelbara bruk.

## II. Pronik-talen

eller *rute-talen* (så kallade, emedan i ett fönster vanligen äro 2 gånger 3 (aflånga) rutor, således ett proniktal) till hvarje rot $v$ är $= v_1^2 = v(v+1) = v^2 + v$, och uträknas med samma maschin eller genom differenser, eller snarare genom addition (+) af alla jemna tal så:

| $v$ | $v_1^2$ | $\Delta$ | $\Delta^2$ | + |
|---|---|---|---|---|
| 0 | '000 | 2 | 2 | 0 |
| 1 | '002 | 4 | 2 | 0 + 2 |
| 2 | '006 | 6 | 2 | 2 + 4 |
| 3 | 012 | 8 | 2 | 6 + 6 |
| 4 | 020 | 10 | | 12 + 8 |
| 5 | 030 | | | 20 + 10 |

hvilket först fortsättes till $v = 1000$, och i ordning sida för sida införes i nästsista spalten under $v_1^2$, der dock, liksom vid första tusendet af qvadraterna, de 3 sista

siffrorne äro genom ett särskilt spaltstreck (eller spaltlucka) skilda från de första. Tillika är i sista spalten bifogadt ett särskildt argument $U = 2V + 1 = W + 1$, så att man omedelbart kan få det proniktal som svarar mot $\frac{1}{2}(U-1)$.

Egentligen skulle dess tabell fortsättas till $V = 10000$, och tryckas särskilt, men som det har sin egna fördel att ega dem till hands bredvid qvadrat-talen, och deras öfriga siffror bero af dessas på ett enkelt sätt, så att de ändå nästan omedelbart ur dessas tabell kunna utskrifvas, så har Præses ansett en särskild proniktabell för större tal öfverflödig för närvarande. — Man ser nemligen lätt att $v_1^2$ är $= \frac{1}{2}(v^2 + (v+1)^2) - \frac{1}{2}$, och således arithmetiska medlet (på $\frac{1}{2}$ när) af de närmaste qvadrattalen, eller kan den utfinnas genom den mindre tabellen efter de formler, som längre fram meddelas.

$$\text{Ex.}\quad 7971^2 = 63\text{˙}536'841$$
$$\text{och}\quad 7973^2 = 63\text{˙}552'784$$

deras Ar. medel (eller halfva summa) $= 63\text{˙}544'812 + \frac{1}{2} = 7971_1^2 + \frac{1}{2}$. Ofta är det dock nog, att taga medlet af mellanclassen (sås. här af $536'$ och $552' = 544'$) samt hemta de 3 sista siffrorne från spalten $v_1^2$.

Man finner nemligen i allmänhet million-siffrorne lika med dem i det närmaste qvadrat-talet, och tusend-siffrorne liggande midt emellan dem i $v^2$ och $(v+1)^2$; hvarvid dock iakttages, att när af dessa den ena är udda och den andra jemn, så måste man såsom den sista taga hälften af deras summa $(s) - 1, = \frac{1}{2}.(s-1)$, om den första af de 3 sista (redan från spalten $v_1^2$ utskrifna) är $> 5$, men $\frac{1}{2}(s+1)$, om den är $< 5$. Såsom

| $v$ | $v^2$ | $v_1^2$ |
|---|---|---|
| 971 | 942′ . . . | 943′812 |
| 972 | 944′ . . . | |
| 495 | 245′ . . . | 245′520 |
| 496 | 246′ | |
| 529 | 279′ | 280′370 |
| 530 | 280′ | |
| 7971 | 63˙536′ . . . | 63˙544′812 |
| 7972 | . . . 552′ . . . | |

På detta sättet kan man t. ex. ur Barlows qvadrat-tabell och en mindre rute-tabell (till $1000_1^2$) utskrifva alla rutetal $< 10000_1^2$, ja äfven större ur en större qvadrat-tabell, såsom Ludolfs, ur hvilken fås t. ex.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $79637^2 =$ | 6342˙ | 051′ | 769 | |
| $79638^2 =$ | . . . | 211′ | 044 | |
| medlet $=$ | 6342˙ | 131′ | | $\Big\} = 79637_1^2$. |
| som slutas med samma som $637_1^2 =$ | . . . . | | ′406. | |

Genom någon öfning kan man vinna färdighet, att omedelbart utskrifva sådana rutetal ur tabellen. (Medlet fås ofta genom ett blott täljande, såsom i föregående Ex. af de udda talen 1, 3, 5 ger det (3) mellan 1 och 5).

Ex. $70697^2_1 = 4998|136|506$.

Man kan ock följa formlen $v_1^2 = v^2 + v$, såsom

$$\begin{array}{r} 79637^2 = 6342|051|769 \\ +\ 79|637 \\ \hline 79637^2_1 = 6342\ 131\ 406. \end{array}$$

Eller blott tillämpa dem på mellersta classen, således här lägga 79 till 051, och 1 dertill, när, såsom här, den från $637^2_1$ hemtade 3:e är < den i qvadraten.

$$\begin{array}{r} \text{Ex.}\quad 9044^2 = 8'793'936 \\ +\ 9' \\ \hline 8'802'980. \end{array}$$

---

## Tillägg.

Föregående beskrifning på en väl inrättad qvadrat-tabell kan med ringa förändring användas på J. Ph. Kuliks Tafeln der Quadrat- und Kubik-Zahlen aller nat. Zahlen bis 100000, Leipzig 1848, der på 400 octavsidor i hvarje rad bredvid $N$ stå $N^2$ och $N^3$, men fördelade i 3 delar, kallade (knapp, kropp, fot)

| | | |
|---|---|---|
| Kopf, | Körper (de mellersta) | och Fuss (de 4 sista) |
| hvilka stå i 3:e raden, | inre spalterna | 2:a & 3:e spalten (för $N^2$ & $N^3$) |
| såsom i qvadraten ($N^2 =$) 777 | 871 | 0809 |
| af talet $N = 88197 =$ 8 | 81 | 97; |

hvars delar stå i första raden & 1:a spalten, nemligen så (pag. 328 & 329):

| $N$ | 0\|81 | 1\|81 | 2 81 | 3 81 | . . . . | | 8 81 | 9\|81 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Kopf = 66 (i $N^2$) | 32 | 79 | 145 | | | 777 | 963 |
| 50 | 42 (fuss = 2500) | 942( ) | 242( ) | 542( ) | | | 042( ) | 342( ) |
| . . . . . | . . . . . . . . . . . | . . . . . | . . . . . | . . . . . | | | . . . . | * . . . . |
| 97 | 19 (. . . . 0809) | 113 | 507 | | | | 871( ) | 265 |
| 98 | 20 (. . . . 7204) | 116 | 512 | | | | 888 | 284 |
| 99 | 22 (. . . . 3601) | 120 | 518 | 916( ) | | | 906 | 304 |

Så är t. ex. $881|97^2 = 777|871|0809$; men $981|97^2 = 964|265|0809$, emedan för 3* bör läsas 4 (eller Kopf ökas med 1); (likaledes är 3 ! = 5).

Huru rumbesparande en sådan inrättning är, finner man, om man i Kuliks tabell anser kubiktalen borta, ty då intaga qvadrat-talen ej fullt 7 ark, under det att desamma hos Ludolf intaga 52. Kubiktalen kan man ock undvara, eller kan man låta dem stadna vid $10000^3$ eller på sin höjd $20000^3$, hvarföre dessa så nyttiga tabeller kunde inskränkas till en måttlig och billig volum. Vid bruket af Ku-